

Bisseção: conservar a raiz

Soluções · ficha 1 de 2

Recorta ou dobra esta página antes de entregar a ficha.

- 1 Executa duas bisseções e regista os sinais. Para $f(x)=x^2-3$, parte de $[1; 2]$. Depois das duas reduções, o ponto médio do intervalo obtido é _____. Resposta: 1,625 Porquê: $f(1)=-2$ e $f(2)=1$. $f(1,5)=-0,75$ conserva $[1,5; 2]$; $f(1,75)=0,0625$ conserva $[1,5; 1,75]$. O novo ponto médio é 1,625. Formas aceites: 1,625; $13/8$.
- 2 Calcula os sinais nos extremos e no ponto médio; associa cada função ao intervalo que a primeira bisseção conserva. Pedidos: x^2-5 em $[2; 3]$; x^3-18 em $[2; 3]$; x^2-7 em $[2; 4]$. Resultados: $[2; 3]$; $[2; 2,5]$; $[2,5; 3]$. Resposta: x^2-5 em $[2; 3] \rightarrow [2; 2,5]$; x^3-18 em $[2; 3] \rightarrow [2,5; 3]$; x^2-7 em $[2; 4] \rightarrow [2; 3]$ Porquê: Os pontos médios são 2,5; 2,5; 3. Os valores aí são 1,25; -2,375; 2. Assim, os intervalos conservados são $[2; 2,5]$, $[2,5; 3]$ e $[2; 3]$.
- 3 Avalia os extremos; decide se continuidade e sinais garantem uma raiz pelo teorema de Bolzano. Numera os cartões de 1 a 4; escreve os números nas categorias e justifica cada decisão. Cartões: 1. x^2-2 em $[1; 2]$ 2. $1/x$ em $[-1; 1]$ 3. x^2-1 em $[-2; 0]$ 4. x^3+1 em $[-2; 0]$ Resposta: Garantia por Bolzano: 1, 3, 4; Sem essa garantia: 2 Porquê: 1: x^2-2 é contínua e os valores nos extremos são -1 e 2. 2: $1/x$ não está definida em zero, pelo que falta continuidade em $[-1; 1]$. 3: x^2-1 é contínua e os valores nos extremos são 3 e -1. 4: x^3+1 é contínua e os valores nos extremos são -7 e 1. Há garantia por Bolzano nos cartões 1, 3 e 4; no cartão 2 não há essa garantia. A ausência de garantia não significa automaticamente ausência de raiz.
- 4 Identifica o erro, escolhe o intervalo correto e justifica-o com os sinais. Em $f(x)=x^3-6$, no intervalo $[1; 2]$, $f(1,5)=-2,625$. A Rita conserva $[1; 1,5]$ porque o ponto médio é negativo. Resposta: Conserva-se $[1,5; 2]$. Porquê: $f(1)=-5$, $f(1,5)=-2,625$ e $f(2)=2$. O intervalo da Rita tem ambos os extremos negativos; $[1,5; 2]$ mantém sinais opostos. Aceita-se uma redação equivalente que corrija a afirmação e apresente os cálculos ou a justificação indicados.

Bisseção: precisão e limites

Soluções · ficha 2 de 2

Recorta ou dobra esta página antes de entregar a ficha.

- 1 Calcula o ponto médio, justifica a menor cota e determina as bisseções adicionais necessárias. Uma raiz α pertence ao intervalo $[1,72; 1,78]$. Usa o ponto médio m como aproximação. Qual é o menor limite superior que se pode garantir para $|\alpha - m|$ apenas com estes dados? Depois determina o menor número de bisseções adicionais necessário para garantir erro não superior a 0,005, conservando sempre um intervalo que contenha α e usando o ponto médio do intervalo final. Opções: 0,06; 0,03; 0,015. Resposta: 0,03 Porque: $m = (1,72 + 1,78)/2 = 1,75$. A largura é 0,06, logo $|\alpha - m| \leq 0,03$. Esta é a menor cota garantida apenas pelo intervalo: uma raiz num extremo pode estar a distância 0,03 do médio. 0,06 também limita o erro, mas não é a menor cota; 0,015 não está garantido. Após n bisseções adicionais, a cota é $0,03/2^n$. Duas dão $0,0075 > 0,005$ e três dão $0,00375 \leq 0,005$; o mínimo é $n=3$.
- 2 Determina o menor número de reduções; verifica também a redução anterior. Um intervalo inicial tem largura 4. Após n bisseções a largura é $4/2^n$. Para garantir largura não superior a 0,02, o menor inteiro n é _____. Resposta: 8 Porque: $4/2^7 = 0,03125$, ainda maior que 0,02; $4/2^8 = 0,015625$. Como a largura decresce a cada redução, $n=8$ é o mínimo. Formas aceites: 8.
- 3 Calcula os valores necessários; classifica a decisão feita pelo aluno. Numera os cartões de 1 a 4; escreve os números nas categorias e justifica cada decisão. Cartões: 1. $x^2 - 5$ em $[2; 3]$: conservar $[2,5; 3]$. 2. $x^2 - 6$ em $[2; 3]$: conservar $[2,5; 3]$. 3. $x^2 - 9$ em $[2; 4]$: terminar com raiz exata no ponto médio. 4. $x^3 - 4$ em $[1; 2]$: conservar $[1; 1,5]$. Resposta: Decisão válida: 3; Decisão inválida: 1, 2, 4 Porque: 1: para $x^2 - 5$, os valores em 2, 2,5 e 3 são -1, 1,25 e 4; deve conservar-se $[2; 2,5]$, logo a decisão é inválida. 2: para $x^2 - 6$, $f(2) = -2$, $f(2,5) = 0,25$ e $f(3) = 3$; conservar $[2,5; 3]$ é inválido. 3: para $x^2 - 9$, $f(3) = 0$, logo a decisão é válida. 4: para $x^3 - 4$, $f(1,5) = -0,625$ e $f(2) = 4$; deve conservar-se $[1,5; 2]$, logo a decisão é inválida. Só o cartão 3 é válido.
- 4 Explica o que a ausência de mudança de sinal permite concluir e dá um contraexemplo dentro do intervalo. O Diogo calcula $f(-1) = f(1) = 1$ para $f(x) = x^2$ e conclui: «Não existe nenhuma raiz em $[-1; 1]$ ». Resposta: A conclusão é falsa: $x=0$ é raiz. Porque: Sinais iguais não garantem ausência de raízes. Neste caso $f(0) = 0$; o teste de mudança de sinal é suficiente para garantir existência sob continuidade, mas não é necessário. Aceita-se uma redação equivalente que corrija a afirmação e apresente os cálculos ou a justificação indicados.